

Analiza matematyczna III

Funkcje holomorficzne i wzór całkowy Cauchy'ego

Zadanie 1 Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z)$ gdy dana jest część rzeczywista

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x$$

$$u(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2$$

$$u(x, y) = e^x \sin y$$

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$$

$$u(x, y) = e^x \sin y - y$$

$$u(x, y) = \arctan(x/y)$$

Zadanie 2 Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z)$ gdy dana jest część urojona

$$v(x, y) = \frac{y}{x+y^2}$$

$$v(x, y) = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$v(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y)$$

$$v(x, y) = 2xy + 3x$$

$$v(x, y) = 2 \ln(x^2 + y^2)$$

$$v(x, y) = 2e^x \sin 2y + x^2 - y^2$$

$$v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + 1$$

$$v(x, y) = \arctan(y/x)$$

Zadanie 3 Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z)$ taką, że $|f(z)| = e^x(x^2 + y^2)$

Zadanie 4 Wykazać, że funkcja $f(z) = e^z$ jest holomorficzna sprawdzając na jej przykładzie prawdziwość równań Cauchy-Riemanna. Zadanie rozwiązać dla współrzędnych kartezjańskich i biegunowych

Zadanie 5 Obliczyć następujące całki ze wzoru Cauchy'ego. W każdym z poniższych przykładów orientacja jest „dodatnia” czyli przeciwnie do ruchu wskazówek zegara

$$\oint \frac{2 \sin(z) dz}{(z-i)^2}$$

całkujemy po elipsie $x^2 + y^2/4 = 1$

$$\oint \frac{ze^{\pi z} dz}{(z+i)^2}$$

całkujemy po brzegu trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, -3)$, $B = (2, -2)$, $C = (-1, 0)$

$$\oint \frac{dz}{(z^2 + 9)^2}$$

całkujemy po $|z - 2i| = 2$

$$\oint \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)^3}$$

całkujemy po $|z - 1| = R$. Rozważyć różne wartości R

$$\oint (z^4 e^{-z^2} + \frac{1}{z^6 - 2z^3 + 1}) dz$$

całkujemy po $|z - 1| = 5/4$

$$\oint \frac{z^2 dz}{z^3 - 2z^2 + z - 2}$$

całkujemy po brzegu obszaru $|Re(z)| + |Im(z)| \leq 3$

$$\oint \frac{z \log(z+2) dz}{(z+2i)^2}$$

całkujemy po brzegu obszaru $\{z = x + iy : |z| > 1, y > 3x^2 - 3, Im(z) < 0\}$

$$\oint \frac{z^{1/3} dz}{(z-i)^3}$$

całkujemy po $x^4 + y^4 = 16$